A. FAGGI

PROF. NELLA R. UNIVERSITÀ DI PALERMO

SULLA NATURA DELLE PROPOSIZIONI LOGICHE

PALERMO
ALBERTO REBER
1898

In un luogo della sua *Storia del materialismo* (1) il Lange dice che l'apoditticità della logica si deve riaddurre alle imagini spaziali dell'attività nostra rappresentatrice, e che le figurazioni geometriche (circoli, angoli, linee) invece di essere un semplice artificio didattico sono il vero fondamento dell'apoditticità nelle regole logiche. In queste parole è conte-

(1) F. A. LANGE. *Geschichte des Materialismus*, II Auflage. Iserlohn 1873-75, vol. II, pag. 127-128. Avendo ora sott'occhio la seconda edizione tedesca dell'opera del Lange, mi sia permesso correggere un errore incorso nel mio libro, *F. A. Lange e il Materialismo*, Firenze 1896. A pag. 114 io scriveva: « La realtà nella sua pienezza e concretezza non si può cogliere dalla scienza, onde la frase apparentemente strana del Lange: La conoscenza scientifica non ha nulla che fare colla realtà ». Ebbene questa frase non è del Lange; è semplicemente un *lapsus* del traduttore francese. Io, com'ebbi già a dichiarare, quando scrissi il mio libro avea davanti la prima edizione tedesca dell'opera del Lange: la seconda edizione m'era nota solamente nella traduzione francese, e il luogo sopracitato non avea riscontro nella prima edizione. Ora il testo tedesco porta: « So bleibt auch der Gegensatz von Ideal und Wirklichkeit bestehen: die wissenschaftliche Erkenntniss aber hat es nur mit der letzteren zu thun ». Cioè la conoscenza scientifica ha da fare solamente colla realtà: è il contrario di quello che ha inteso il traduttore francese.

Io avea notato l'apparenza strana di questa frase, ma nulla più che l'apparenza, perchè essa, del resto, non avrebbe nulla di stridente colle idee del Lange. Egli infatti oppone spesso il mondo della scienza al

nuto un germe che il Lange ci offre sviluppato nei suoi *Studi logici* (1).

Che cosa si propone dunque il Lange? Egli vuol mostrare che la necessità o l'apoditticità delle proposizioni logiche non dipende da altra ragione che quella da cui dipende la necessità o l'apoditticità delle proposizioni matematiche, cioè dalla nostra intuizione dello spazio. Nei trattati di logica

mondo dell'intuizione immediata, e mostra che quello non ha niente che fare con questo. Anche nei Principî di Psicologia del James ritorna a chiare note questo concetto. L'ordine del pensiero scientifico, egli dice, è affatto incongruente sia col modo di esistere della realtà, sia col modo in cui essa si presenta a noi. Il pensiero scientifico va esclusivamente *by selection and emphasis*. Noi rompiamo la solida pienezza del fatto in essenze separate, concepiamo generalmente ciò che esiste solo particolarmente, e colle nostre classificazioni non lasciamo nulla nel suo *entourage* naturale, ma separiamo i contigui e congiungiamo i lontani. La realtà esiste come un pieno; tutte le sue parti sono contemporanee, ciascuna è reale come un'altra, e concorre come un'altra a fare il tutto quale è e non altro. Ma noi non possiamo sperimentare e pensare ad un tempo questo pieno. Ciò che sperimentiamo, ciò che si offre a noi è una massa, un caos d'impressioni frammentarie che si frastagliano l'una coll'altra: ciò che noi pensiamo è un sistema astratto di dati e di leggi ipotetiche. Questa specie di algebra scientifica, per quanto poco somigli alla realtà immediatamente data, è tuttavia applicabile ad essa, può essere cioè tradotta in valori reali.

Io perciò opponeva, a spiegare la supposta frase del Lange, la concretezza e la pienezza della realtà ai procedimenti astratti della scienza. Ma nel luogo in quistione evidentemente il Lange prende realtà in senso diverso da quello che l'abbiam presa il James ed io. Egli non oppone la realtà, immediatamente data dai sensi, all'astrazione scientifica, come fa pure in altri luoghi; ma oppone il *reale* all'*ideale*, ossia ciò che è ragione a ciò che è imaginazione, ciò che è, in generale, conoscenza a ciò che è poesia. E, per questo verso, allora può dire che la conoscenza scientifica ha da fare solo colla realtà.

(1) Logische Studien. *Ein Beitrag zur Neubegründung der formalen Logik und der Erkenntnisstheorie* von F. A. Lange. Iserlohn 1877.

che vanno per le mani di tutti, si sogliono adoprare alcune figure geometriche per dimostrare i diversi rapporti logici dei concetti; ma queste figure geometriche si considerano come un semplice apparato scolastico per far comprendere meglio i rapporti logici delle idee, che si presentano d'altronde allo spirito per un lavoro puramente concettuale. Ora il Lange afferma che queste figurazioni geometriche, lungi dall'essere un'appendice o un'esemplificazione di lusso, contengono la vera ragione dell'apoditticità e della necessità delle regole logiche.

Nota è la distinzione del Kant fra giudizi *a priori* e giudizi *a posteriori*, giudizi analitici e giudizi sintetici. Giudizi *a posteriori* sono quelli che si ricavano dall'esperienza, es., i metalli sono porosi: giudizi *a priori* sono quelli che non vanno debitori all'esperienza della loro validità, es., il tutto è maggiore delle parti, una cosa non può ad un tempo essere e non essere ecc. I giudizi *a priori* sono accompagnati dalla coscienza di una incondizionata necessità, la quale non si accompagna per contro coi giudizi d'esperienza ossia *a posteriori*. Ciò perchè ogni giudizio d'esperienza può essere smentito da un altro giudizio d'esperienza: ma quando io dico: la linea retta è la più breve che unisca due punti, vedo subito l'incondizionata necessità di questa asserzione, nè temo smentita al mondo, anzi affermo che la smentita è impossibile. Alla necessità dei giudizi *a priori* si unisce l'universalità, non potendosi essi non verificare in tutti i casi della realtà. La necessità e l'universalità assoluta sono segni certi di ogni conoscenza *a priori*, e sono fra loro inseparabili.

I giudizi poi sono analitici in quanto niente è detto di più nel predicato di quello che non sia già contenuto nel soggetto. Se dico: Tutti i corpi sono estesi, io non ho per nulla allargato la mia conoscenza dei corpi, non potendo io

porgere alla mia mente il soggetto corpo, senza pensare contemporaneamente l'estensione. Coll'atto del giudizio io non ho fatto che sciogliere il soggetto nei suoi elementi costitutivi, e metterne uno in rilievo come predicato. I giudizi sintetici al contrario allargano la nostra conoscenza del soggetto. Quando io dico: Tutti i corpi celesti gravitano, attribuisco al mio concetto di corpo celeste una proprietà, che non è in esso contenuta e che io non penso con esso. I giudizi analitici sono evidentemente *a priori*, perchè io non ho bisogno, per sciogliere il soggetto nei suoi elementi costitutivi che son dati con lui, dell'esperienza Basta che io abbia il concetto del subietto perchè io abbia in pari tempo il concetto del predicato, e l'atto del giudizio non fa che rendere esplicito al mio spirito ciò che implicitamente era da me pensato.

Ma i giudizi sintetici? Sono essi tutti ricavati dall'esperienza, sono cioè tutti *a posteriori*, oppure ci sono anche giudizi sintetici *a priori?* Per il Kant i giudizi matematici sono giudizi sintetici *a priori:* invece le proposizioni della logica sono bensì *a priori*, ma di natura analitica. Fu Kant il primo a considerare i giudizi matematici come sintetici a una volta e *a priori:* prima di lui dominava il concetto che anche i giudizi matematici fossero analitici come le proposizioni logiche, e, come queste, riposassero perciò sul principio di contradizione (1). Ora il Lange vuol fare per la Logica ciò che il Kant fece per la Matematica, vuol mostrare cioè che anche le proposizioni della logica sono di natura sintetica. La natura di tutti i giudizi necessari cioè *a priori* dev'essere la stessa, egli dice: o sono tutti analitici o sono tutti sintetici. I giudizi matematici si formano per una sintesi *a priori* mediante l'intuizione dello spazio; ebbene lo stesso accade per le proposizioni logiche; anche in queste

(1) Lange, *Log. St.* pag. 8, 9.

la vera forza dimostrativa sta nelle costruzioni e figurazioni spaziali con cui le accompagnamo. Ossia l'evidenza della logica come quella della matematica riposa in fondo sull'intuizione, e ogni intuizione è in fondo di natura spaziale.

La logica più che carattere concettuale dovrebbe dunque avere carattere intuitivo. La stessa quistione fu fatta per altro a proposito della matematica. Mentre da una parte si cerca di ridurre nella geometria ogni evidenza logica a un'evidenza intuitiva (e lo Schopenhauer fu grande fautore di questa idea), dall'altra si vuol liberarsi dai limiti dell'intuizione, costruendo una matematica assolutamente pura e formale. L'Hankel, per esempio, ha creduto di darci nella sua *Allgemeine Formenlehre* una matematica puramente intellettuale, libera da ogni intuizione, « in welcher nicht Quanta oder ihre Bilder, die Zahlen verknüpft werden, sondern intellectuelle Obiekte, Gedankendinge, denen actuelle Obiekte oder Relationen solcher entsprechen können, aber nicht müssen ». I rapporti formali universali, che formano l'oggetto di questa matematica, egli chiama anche trascendentali o potenziali, in quanto racchiudono in sè la possibilità di rapporti reali. Le regole di questa matematica pura non sono dimostrate, ma solo esemplificate dall'aritmetica ordinaria; precisamente come si suol dire delle figure geometriche nella logica, che esse non dimostrano, ma esemplificano. E il Lange a mostrare che questa pretesa esemplificazione riman sempre la prova intuitiva dei fondamenti sintetici di questa matematica pura, la quale può ben seguire del resto il metodo deduttivo coi suoi oggetti intellettuali, nello stesso modo che l'Algebra coi suoi segni generali, l'Aritmetica coi suoi numeri reali. In Hankel come in Grassmann non è poi difficile scoprire il fattore intuitivo in quei concetti generali con cui essi operano.

Mentre che, disse il Kant, le quantità possono essere

costruite in intuizioni *a priori*, le qualità non possono. Di qui la differenza essenziale fra la matematica e la logica, e, in generale tra la matematica e la filosofia. La filosofia è una conoscenza razionale per concetti semplici, la matematica è una conoscenza razionale per costruzione dei concetti in intuizioni. Sorgente delle intuizioni (così di spazio come di tempo) è la sensibilità; dei concetti è l'intendimento. Il Kant oppone così la sensibilità all'intendimento; opposizione a cui il Lange si ribella. È un compito dell'avvenire, egli dice, il mostrare che un puro intendere, un puro pensare nel senso voluto dai metafisici, dai quali non si disgiunge su questo punto il Kant, non esiste. Non c'è per il Lange pensiero senza intuizione, nè intuizione senza pensiero.

Secondo il Kant l'esperienza riposa sull'unità sintetica dei fenomeni, resa possibile dall'unità dell'appercezione; vale a dire su di una sintesi dei fenomeni in generale, che si opera secondo concetti, senza cui l'esperienza non avrebbe il carattere d'una conoscenza, ma quello d'una rapsodia di percezioni che non formerebbero tra loro contesto alcuno. Ossia ogni oggetto dell'esperienza è sottoposto alle regole generali che costituiscono l'unità sintetica negli elementi molteplici dell'intuizione: tale è il principio supremo di tutti i giudizi sintetici *a priori*. Ora l'intendimento puro è appunto la sorgente di quei principî *a priori*, cui ogni oggetto deve necessariamente soggiacere. I principî matematici sono, è vero, principî puri *a priori* non tratti da concetti puri, sibbene da intuizioni pure: ma la loro applicazione all'esperienza e la stessa possibilità della loro conoscenza sintetica *a priori* riposano sempre sull'intendimento puro.

Tutto ciò è negato dal Lange. Il Kant considera, egli dice, la sensibilità come puramente passiva: deve quindi l'intendimento, attivo, per trar fuori una semplice imagine spaziale dagli oggetti sensibili, introdurre l'unità nel molte-

plice. Ma in questo necessario e subiettivo atto di sintesi non si trova nulla di ciò che si chiama intendimento. Solamente la falsa supposizione che ogni spontaneità convenga al pensiero, ogni recettività alla sensibilità può far mettere in rapporto la sintesi delle impressioni sensibili, onde nasce la nostra rappresentazione di cosa, coll' intendimento. La categoria della sostanza si svolge invece dalla sintesi puramente sensibile delle impressioni in una imagine o rappresentazione spaziale; perchè ogni pensiero è originariamente sensibile (1).

Dice il Kant: Quando si ammette che bisogni uscire da un concetto dato per avvicinarlo sinteticamente a un altro, si deve pure ammettere un 3° termine, che solo può produrre la sintesi dei due concetti. E qual è questo 3° termine che è come il *medium* di tutti i giudizi sintetici? Non può essere che un insieme in cui sian chiuse tutte le nostre rappresentazioni, cioè il senso interiore e la forma *a priori* di questo senso che è il tempo. Il tempo è per il Kant la condizione

(1) Cf. *Gesch. des Mat.*, pag. 128, vol. II. Il Lange dice poi nei suoi *Logische Studien* (pag. 135, 136): La sintesi è il solo fatto psicologico che non si può ridurre alla fisiologia o alla meccanica cerebrale, e che ciò nonpertanto deve aggiungersi a ogni processo nervoso per cangiare il fatto meccanico in fatto psichico. Ma non si deve credere di poter trarre da una semplice parola una conoscenza che d'altronde non si ha. Noi non sappiamo nè se questa sintesi sia un atto dell'intendimento come affermò il Kant, nè se sia la manifestazione di un'anima o un effetto, incomprensibile alla nostra intuizione, del meccanismo degli atomi. Questa espressione non fa se non fissare il semplice fatto, che in tutte le nostre rappresentazioni si trova l'unificazione di un molteplice, senza cui le rappresentazioni stesse non sarebbero possibili.

E più sotto: Il fatto del collegamento del molteplice nell'unità di una rappresentazione può ben essere il procedimento per cui noi sorgiamo come *soggetto*. Certo esso non si può separare dal lato *subiettivo* dei fenomeni psichici, poichè ogni passaggio da impressioni inconscenti a una coscienza reale si fa per mezzo d'una sintesi.

formale *a priori* di tutti i fenomeni in generale, lo spazio è invece condizione *a priori* soltanto per i fenomeni esterni. Siccome tutte le rappresentazioni, abbiano o no un oggetto esterno, appartengono sempre per sè stesse, in quanto determinazioni dello spirito, a uno stato interno, e siccome questo stato interno riman sempre sottomesso alla condizione formale dell' intuizione interna, cioè del tempo, il tempo è la condizione *a priori* di ogni fenomeno in generale, condizione immediata dei fenomeni interni e perciò condizione *mediata* di tutti i fenomeni esterni.

Per il Lange, come abbiamo accennato, ogni intuizione è, in fondo, spaziale. Lo spazio è per lui la forma intuibile dell' io col suo contenuto cangiante, perchè all' infuori dello spazio non si danno nè intuizioni, nè rappresentazioni. Si suole opporre come oggetto esterno l' io corporeo, il cui contenuto è indubbiamente intuibile nello spazio, all' io soggetto puro del conoscere. Ma così sparisce ogni contenuto peculiare dell' io, perchè allora il suo solo contenuto è il grande insieme del mondo (in quanto conoscibile) nelle sue parvenze spaziali. Se anche questo si vuole naturalmente considerare come oggetto esterno, e ascrivere quindi all' io conoscente ancora un' interna conoscenza, una conoscenza di sè, non si fa che tirare manciate di nulla. Autoconoscenza non vuol dire che conoscenza della propria persona, in quanto che essa come io corporale si oppone, agendo e patendo, agli altri oggetti del mondo esterno. Saper di sè non vuol dire altro che sapere della sua propria persona, in quanto essa diventa oggetto della nostra conoscenza al pari di tutti gli altri oggetti. Ogni apprensione di uno stato interno è solamente apprensione di una parte degli stati della nostra persona empirica, e non può assumere alcun contenuto se non dai sintomi corporei.

Il Lange avea già mostrato nella sua « Storia del Ma-

terialismo » che non ci può essere un vero e proprio senso interno. Quand' anche si volesse adottare per pura comodità del linguaggio questa espressione, non si sarebbe per nulla licenziati ad assegnare la forma del tempo a quest' apprensione rivolta all' interno. L' apprensione empirica del nostro stato interiore non può compiersi nella pura e semplice forma del tempo, perchè ci è data sempre contemporaneamente una moltiplicità di sensazioni, che solo nella forma di un'imagine spaziale possono riuscire a una sintesi. Il linguaggio popolare e i poeti, che cercano di rendere queste sensazioni il più fedelmente possibile, dicono il cuore ore leggero, ora grave, ora duro, ora molle; i sentimenti errano pei labirinti del cuore, i pensieri ondeggiano nel capo ecc.

Forse che la forma del tempo apparisce esclusivamente nel puro pensiero? Che cosa è il puro pensiero? Il geometra che medita ha nel pensiero le sue figure, l' architetto i suoi disegni, il maresciallo le sue file schierate, sempre imagini spaziali. Se, in una parola, si vuole, per raggiungere il puro pensiero, fare astrazione da tutto ciò che appartiene alla sensazione e all' intuizione spaziale, si arriva a un pensiero vuoto che è una pura astrazione.

Le rappresentazioni nostre del movimento nello spazio ci danno la possibilità di misurare il tempo: la rappresentazione del tempo è secondaria rispetto alla rappresentazione dello spazio. Si dice infatti uno spazio di tempo per indicare un certo corso di tempo, e non si direbbe già un tempo di spazio per indicare un tratto d' estensione nello spazio. Il movimento lungo una linea ci dà la rappresentazione del corso del tempo; nè senza l' intuizione del movimento nello spazio si potrebbe arrivare a nessun assioma concernente i rapporti temporali.

Il Kant, opponendo l' intuizione al concetto, cerca colla sua dottrina degli *schemi* di gettare un ponte fra l' una e

l' altro. Gli schemi del Kant indicano il modo in cui intuizione e concetto si comportano fra di loro, e più propriamente la variazione di un' imagine spaziale nella fantasia, dentro i confini di una regola, data per mezzo di un concetto. Il concetto del cane indica una regola, secondo cui la mia imaginativa può abbozzare l'imagine di una bestia a quattro gambe, senza esser limitata a una particolare imagine qualsivoglia che l' esperienza mi offra, o anche a ogni imagine possibile che io mi rappresenti in concreto. Ma questo schema è opera della fantasia, che nella produzione d'una serie d'imagini ci dà anche la regola stessa in concreto; regola, che poi, per il lavorio dell' astrazione che la fissa in una parola, apparisce opera d' una intelligenza. In realtà il concetto è immanente all' intuizione: intendimento e fantasia sono una sola e medesima cosa nella produzione dello schema. Lo schema non è un legame fra il concetto e l' intuizione, ma la immediata parvenza psicologica del concetto. Senza un concetto la variazione dell' imagine spaziale nella fantasia sarebbe un vacuo inane gioco che nulla proverebbe; eppure la forza probante sta nell' intuizione, e ogni concetto è primitivamente fissato per mezzo dell'intuizione (1).

Il Lange cerca adunque nell' uso delle imagini spaziali, sia nella fantasia pura, sia colla cooperazione sensibile, la vera sorgente della universalità e della necessità delle proposizioni logiche. Apodittico è in logica ciò, che, al pari delle proposizioni matematiche, si può sviluppare in un modo assolutamente convincente per tutti, all'infuori di ogni disputa di scuola e di ogni capriccio individuale. E questa apoditticità non è, come s'è detto, una conseguenza della natura semplicemente analitica di queste proposizioni, ma il frutto di una intuizione, e di una intuizione nello spazio; donde la

(1) Cf. *Log. St.*, pag. 133, 134.

natura sintetica delle proposizioni logiche al pari delle proposizioni matematiche. Le disprezzate figurazioni geometriche, con cui si credevano di accompagnare per semplice evidenza sensibile e per comodo dell' insegnamento le dimostrazioni logiche, sono invece la vera ragione della loro apoditticità.

Prendiamo un esempio, in cui apparisca pure evidente la deduzione dal principio di contradizione, la conversione del giudizio universale negativo. Dice Aristotele: se nessuno dei *B* è *A*, nessuno degli *A* sarà *B*, perchè se uno degli *A*, *C* per esempio, fosse uno dei *B*, non sarebbe più vero che nessuno dei *B* è *A*, perchè *C* è uno dei *B*. Qui dovremmo avere dunque la prova per mezzo del puro e semplice principio di contraddizione. Ma abbiamo anche il concetto ausiliario *C* che non era dato nella proposizione da dimostrarsi; e l' introduzione di esso non può avere altro scopo che quello di rendere intuibile una qualunque delle parti di *B*, il che non può farsi senza una imagine spaziale. D' altra parte l' infinita variabilità propria alle rappresentazioni dello spazio è la vera ragione per cui noi, nelle figure sì della geometria che della logica, facciamo subito valere il particolare come generale.

La convertibilità del giudizio universale negativo si può del resto mostrare in un modo tutt' affatto intuitivo, senza bisogno di ricorrere alla dimostrazione aristotelica, che pure, come abbiam visto, si fonda in ultimo sull' intuizione anche essa. L' imagine di due sfere compiutamente separate mostra abbastanza chiaramente che non c' è alcuna differenza nel rapporto dell' una all' altra, perchè l' una è esterna all' altra; ossia la convertibilità del giudizio sopraddetto appare evidente, appena si sia spiegato ciò che le due sfere rappresentano.

Se io rappresento il termine maggiore *mortali* colla circonferenza *A*, e in essa iscrivo la circonferenza *B* che rappresenti il termine medio *uomini*, iscrivendo poi nella cir-

conferenza *B* la circonferenza *C* che rappresenti il termine minore *Caio*, vedo subito che se *B* è in *A* e *C* è in *B*, *C* è in *A*; ossia se gli uomini sono mortali e Caio è un uomo, necessariamente Caio è mortale. Ossia se la umanità *B* è nella mortalità *A*, e Caio *C* è nella umanità *B*, Caio *C* sarà necessariamente nella mortalità *A*. Dico necessariamente, perchè? Perchè, che io faccia più piccola o più grande nella mia imaginazione la circonferenza *B*, che io la faccia muovere a destra o a sinistra, in alto o in basso, purchè non le lasci superare i confini della circonferenza *A* entro cui deve rimanere (regola concreta dell' intuizione); che io faccia lo stesso colla circonferenza *C* dentro la circonferenza *B*, vedo subito in un batter d' occhio, come, malgrado l' infinito numero delle variazioni possibili, non ce n' è alcuna di queste che esorbiti dalla regola dell' inferenza da me tirata. Vedo subito che se *C* (o una parte di esso) non rientrasse in *A*, non potrebbe neanche rientrare in *B*, il che escludo col semplice principio di contradizione, perchè contraditorio alla proposizione data che *C* è in *B*. Come in geometria, anche qui l' intuizione spaziale è il fondamento ultimo della *apriorità* e della necessità. E mercè appunto la costruzione spaziale, la proposizione logica è, come le proposizioni geometriche, di natura sintetica e non di natura analitica.

Ci sono, è vero, allargamenti della logica in via puramente analitica, ma ci sono anche nella matematica, il che prova che non c'è fra questa e quella l' abisso che pensava il Kant. Qualche volta il principio di contradizione agisce meccanicamente sostituendo l' intuizione. Ma assolutamente cieca, cioè senza intuizione, non è mai alcuna operazione del pensiero, specialmente quando si voglia avere la convinzione e la certezza della prova. Del resto il principio di contradizione si fonda anch' esso sull' intuizione. Il principio di contradizione si può considerare sotto due aspetti, sotto l' aspetto

psicologico e sotto l'aspetto logico. Sotto l'aspetto psicologico è una legge naturale del nostro pensiero, ed esprime l'impossibilità di riunire in esso due cose opposte fra di loro, quando, s'intende, la loro opposizione sia scoperta, apparisca cioè alla nostra mente; perchè allora una delle due rappresentazioni deve cedere e scomparire. Sotto questo aspetto il principio di contradizione non ha bisogno dell'intuizione; esso è anteriore ad ogni esperienza, è dato immediatamente col nostro organismo psicofisico, e opera anche a nostra insaputa e nostro malgrado. Sotto l'aspetto logico è una legge normativa, e, come tale, al pari di tutti gli altri assiomi e principî, ha bisogno per convincerci dell'intuizione tipica. Che il tutto è più grande delle parti, che aggiungendo quantità uguali a quantità uguali, queste restano uguali, noi lo vediamo e perciò lo crediamo. Ogni e qualsivoglia esempio chiude l'universalità in sè, perchè noi nella nostra fantasia facciamo muovere quella tale imagine spaziale, e acquistiamo la convinzione che in ogni pensabile variazione di forma e di grandezza il risultato riman sempre quello. Parimente constatiamo in un imagine spaziale di una qualche specie, sia in un caso concreto sia in un puro schema lineare, che non si può affermare e negare la stessa cosa dello stesso oggetto. La singola imagine diventa allora tipica, ma senza imagine mi rimane la formula vuota, e io non acquisto nè la convinzione della sua incondizionata validità, nè una veduta reale conforme al suo significato (1).

Il Lange distingue 5 rapporti elementari fra i concetti da cui si deve dedurre tutta la tecnica logica elementare. Questi 5 rapporti sono: l'identità, il rapporto categorico, il rapporto categorico inverso, l'incrociamento dei concetti, la esclusione. L'identità si rappresenta con una circonferenza

(1) Cf. *Log. St.* pag. 27-29.

che esprime egualmente i due concetti *a*, *b*; il rapporto categorico con la circonferenza *b* iscritta nella circonferenza *a*; il rapporto categorico inverso colla circonferenza *a* iscritta nella circonferenza *b*; l'incrociamento dei concetti colle due circonferenze *a*, *b*, che si tagliano; l'esclusione colle due circonferenze *a*, *b*, esterne l'una all'altra. Dalla semplice combinazione di questi rapporti fondamentali si deve dedurre tutta la solligistica come tutte le altre proposizioni logiche. Ciascuna delle due premesse di un sillogismo si potrà sempre rappresentare geometricamente con una delle 5 figure sopraddette corrispondenti ai 5 rapporti logici fondamentali. Una volta costruite le due figure corrispondenti alle due premesse, si vedrà subito col semplice raffronto di esse, cioè colla semplice intuizione, qual è la figura resultante che corrisponderà alla conclusione. La tecnica logica non trascende in alcun punto la sfera dell'intuizione spaziale. Anche il giudizio ipotetico non porta con sè alcuna nuova forma della tecnica logica. Come specialmante l'Herbart ha mostrato, esso si accorda in tutti i punti essenziali col giudizio categorico, onde le inferenze ipotetiche possono rendersi intuibili colle stesse imagini spaziali che rendono intuibili le categoriche (1).

Quanto al giudizio disgiuntivo il suo schema fondamentale è una circonferenza *A*, divisa in due parti *B*, *C*; gli animali sono vertebrati o invertebrati. Ma questa forma non rappresenta propriamente secondo il Lange il giudizio disgiuntivo sibbene il giudizio divisivo, ossia il principio fondamentale della disgiunzione, di un tutto diviso in due parti. In ogni giudizio disgiuntivo, a ben guardare, oltre un giudizio divisivo c'è un giudizio categorico, donde la possibilità di rappresentare il giudizio disgiuntivo per mezzo di due figure

(1) Cf. *Op. cit.*, pag. 99.

geometriche alla cui sintesi esso corrisponde. Nel caso dei giudizi disgiuntivi meglio è di adoperare per la figurazione invece di circoli, rettangoli. La prima figura ci presenta un giudizio categorico, cioè un rettangolo (che potrebbe anche essere un circolo) che corrisponde al predicato P, in cui si suppone muoversi un punto S, che corrisponde al soggetto, e con ciò si significa che il soggetto è compreso nell'ambito del predicato e in qualsivoglia punto di esso. L'altra figura ci presenta un rettangolo P, diviso in parecchie sezioni P_1 P_2 P_3 ... con cui si esprime il rapporto del genere P alle sue specie. Si potrebbe anche a tal uopo adoperare una circonferenza, ma ciò potrebbe generare confusione pel confronto quantitativo delle diverse sezioni, specialmente quando queste si suppongano uguali.

Il Lange poi dimostra che le regole fondamentali del calcolo delle probabilità poggiano sulle proprietà del giudizio disgiuntivo, e quindi traggono la loro forza assiomatica dall'intuizione, su cui questo riposa, benchè il processo storico nella scoperta di questo nuovo campo della logica formale sia stato alquanto diverso. Non la logica infatti ma il giuoco colle sue probabilità di vincita e di perdita dette origine ai primi tentativi in questo campo, che nel nostro secolo si è tanto allargato, producendo sì ricchi frutti per la scienza in generale e per le scienze morali in particolare; e sebbene anche in questi tentativi l'intuizione delle monete, dei dadi, delle pallottole in un'urna rendesse i suoi servigi, mancava ancora il concetto di ridurre i calcoli delle probabilità alla intuizione fondamentale, su cui si dimostra basarsi il giudizio disgiuntivo. Il principio del calcolo delle probabilità diventa così un principio logico, e questo principio logico è riaddotto all'intuizione d'imagini spaziali, come tutti gli altri principî della logica. L'intuizione di oggetti o d'imagini spaziali, su cui si fonda esso calcolo, non è un che estraneo al campo

della logica, anzi dipende dall'intuizione delle figure geometriche semplici, che servono alla rappresentazione delle proprietà del giudizio disgiuntivo; così i principî del calcolo delle probabilità di empirici diventano apodittici, perchè si scuopre in essi un lato formale e aprioretico.

Due asserzioni del Kant sono state smentite dal tempo: l'una che la psicologia non potrebbe mai essere che una scienza descrittiva, cioè una storia naturale dell'anima, essendole conteso l'uso del calcolo e della sperimentazione; l'altra che la logica formale, come Minerva dalla testa di Giove, fosse uscita completa dalla testa di Aristotele. Il Fechner infatti riuscì a formulare in termini matematici una legge psicofisica; il Wundt mostrò la possibilità di dare una interpretazione psicologica a questa legge, e di calcolare con una tavola di logaritmi i valori delle sensazioni corrispondenti alle eccitazioni. Col principio del parallelismo psicofisico si mostrò altresì essere possibile la sperimentazione e l'induzione scientifica in psicologia (e il metodo statistico o dei grandi numeri portò a tal uopo il suo prezioso contributo), onde quella di descrittiva diventò scienza esplicativa.

Quanto alla logica sorsero già i logici inglesi a sostenere che la logica aristotelica non è che un tentativo elementare, un abbozzo informe di logica. Essa è una logica puramente grammaticale: invece la logica scientifica deve astrarre dal simbolo linguistico, per arrivare ai veri principî formali del pensiero, guadagnando così la massima generalità ed esattezza. Bisogna arrivare alla vera operazione logica, indipendentemente dall'uso materiale della lingua. In altri termini si deve applicare, disse il Boole, alla logica l'analisi matematica. Nell'antica analitica ogni inferenza è tirata o da una proposizione unica (inferenza immediata) o da due proposizioni (inferenze mediate, sillogismi). Ma si può domandare quali siano tutte le relazioni logicamente possibili fra tutti

i termini, per quanto numerosi, di una proposizione data, quali conclusioni risultino da un sistema di più di due premesse. Che cosa è in fondo l'operazione deduttiva? Essa non è altro che l'eliminazione d'un termine medio in un sistema di tre termini. Allora è facile generalizzare il problema così: Dato un sistema di un numero qualunque di termini, eliminare tanti termini medii quanti si vorranno, e determinare tutte le relazioni implicate dalle premesse fra gli elementi che si desidera ritenere. Il sillogismo diventa così un caso particolare della teoria della eliminazione.

Mentre il Lange ci presenta la logica sotto forma geometrica, il Boole ce la presenta sotto forma algebrica, precorso in questa via già dal Leibniz e dal Lambert. Il Lambert infatti chiarì che per la dimostrazione delle proposizioni logiche ci si può servire di certi segni convenzionali, simili a quelli dell'algebra, coi quali non solamente concetti e rapporti di concetti, ma anche certe operazioni come l'astrazione e la determinazione possono essere espresse (1). Ma il Lange nota che se la forma algebrica ha il vantaggio di potere esprimere con facilità rapporti e specialmente operazioni, la cui rappresentazione in linee sarebbe impossibile o troppo complicata, dall'altra parte le verità fondamentali e più universali della logica non potrebbero mai essere rappresentate per questa via in una maniera così intuibile come colle figure geometriche (2).

Pare adunque che nella forma geometrica si esprimano meglio i rapporti logici, nella forma algebrica le operazioni logiche. Del resto la tendenza all'astrazione, che ha dominato i nuovi matematici fino nel nostro secolo, dovea portare a sciogliere, fin dove è possibile, i problemi della logica, come

(1) Cf. *Log. St.*, pag. 142, 144.
(2) Op. cit, pag. 142, 143.

quelli della geometria, in esempi del calcolo. E la forma algebrica, se rinuncia alla maggiore intuibilità della forma geometrica, si fonda anch'essa, in ultima analisi, sull'intuizione. Dice il Lange: Gli assiomi algebrici riposano come i geometrici sull'intuizione; e là dove i matematici lasciano il terreno dell'intuizione come nell'uso dei numeri imaginari, servono i segni convenzionali stessi da appoggi sensibili al pensiero. La legittimità di queste operazioni sta poi nell'analogia colle forme del calcolo accessibili all'intuizione, e nella fiducia che un calcolo, condotto con assoluta conseguenza attraverso ciò che non ha nè senso nè significato, permetta poi un sicuro ritorno sul campo dell'intuizione: ossia l'imaginario non ha la sua giustificazione in sè stesso, ma nel modo in cui si lascia adoperare per il reale; e il Baumann mette giustamente in rilievo che questo uso, questo impiego non fu dapprimo che uno esperimento, il quale fu poi dimostrato legittimo solamente dall'accordo colla realtà. Importanti campi della nuova algebra, come la teoria delle combinazioni, sono addirittura scaturiti dall'intuizione d' imagini spaziali.

Qui cade in acconcio discutere la natura dell' idea di numero. Alcuni hanno messo l'idea di numero in rapporto coll'idea di tempo, altri coll'idea di spazio. Il Masci invece nella sua pregevolissima memoria « Sulla natura logica delle conoscenze matematiche (1) » ritenne che l'idea di numero non poggi sull'intuizione, ma sul pensiero; onde il numero sarebbe una proprietà di cui non le cose direttamente, ma il pensiero delle cose sarebbe il subietto. Il numerare, in altri termini, è per lui una forma, la più semplice, della funzione di analisi e di sintesi, che è la funzione fondamentale del pensiero; quindi il numero come *ens rationis* non è simile

(1) *Fil. delle sc. it.*, an. 1885.

a nessuna moltiplicità reale, e i suoi elementi sono omogenei e indifferenti: egli è insomma la maniera di concepire la quantità delle cose, indipendentemente dalla loro qualità. Il numerare così si risolve per il Masci nel pensare, e l'unità non è altro che l'atto singolo di pensare l'essere senza qualità di sorta. La serie numerica non è altro che la sintesi di singoli atti di pensiero nel tempo: nel calcolo aritmetico non non c'è in giuoco altro che lo schema, senza qualità, della funzione di analisi e di sintesi del pensiero formale. Così nell'aritmetica come nella logica formale il pensiero lavora su dati che sono suoi: il calcolo è come la logica formale della quantità.

Quest'opinione non manca di diffusione fra i matematici. Il Dedekind considera addirittura l'Aritmetica come un ramo della Logica deduttiva. Per lo Schröder la Matematica pura, intesa nel senso più stretto della parola, cioè come disciplina rigorosamente deduttiva, comprenderebbe l'Aritmetica e la Logica (aritmetica vuol dire qui l'intiera dottrina dei numeri e delle loro funzioni, algebra, analisi, teoria delle funzioni ecc.). La Geometria è invece per lui la prima parte della Fisica, i cui assiomi stanno a pari livello con quelli della Meccanica; ella si oppone quindi alla Matematica pura, apparendo originariamente come un ramo delle scienze induttive o naturali, benchè sia presto entrata anch'essa in uno stadio deduttivo, assumendo un carattere matematico puro (1).

Il Kant derivò l'idea di numero dall'idea di tempo, dicendo che il numero è lo schema, cioè l'intuizione nella forma del tempo, della quantità. Infatti, siccome il numerare è un

(1) Lo Schröder si trova su questo punto a una bella distanza dal Lange. Per lui è dimostrato che le proposizioni della matematica pura sono di natura analitica, talchè la domanda del Kant: Come sono possibili i giudizi sintetici *a priori?* risulterebbe assurda. Ciò che è *a priori*, ossia

aggiungere successivo di unità ad unità, e successione vuol dir tempo, così l'idea di numero suppone l'idea di tempo. A questa opinione si accostarono l' Hamilton e il Whewell.

Il Lange invece, in conformità coi suoi principî, ritiene, sul fondamento del Baumann, che l'idea di numero derivi molto meglio dall'idea di spazio che da quella di tempo. L'idea di numero come quella di tempo sono per lui rappresentazioni posteriori rispetto all'idea di spazio. Le più antiche espressioni dei nomi numerali designano sempre oggetti nello spazio con proprietà determinate, che corrispondono al numero, come quadrato al numero quattro. Gli uomini prima di aver trovato parole per i numeri contavano sulle dita. Una tribù indiana sull'Orenoco esprime il numero 5 con tutta una mano, 6 con una espressione che vuol dire: prendi uno dall'altra mano, 10 con ambedue le mani; quindi vengono i diti dei piedi, così che tutto un piede significa 15, uno dell'altro piede 16, un indiano 20, uno della mano di un altro indiano 21 ecc. Noi vediamo da ciò che l'idea di numero non sorge originariamente dal sistematico aggiungersi di uno ad uno, ma che ciascuno dei più piccoli numeri, i quali staranno a fondamento dei sistemi posteriori, è formato per un atto speciale di sintesi dell'intuizione; dove solamente più tardi si sono specificate le relazioni dei numeri fra di loro, la possibilità dell'addizionare ecc. (1)

A quelli che negano il carattere intuitivo dell'idea di numero, dicendo come il Masci che l'intuizione nei grandi numeri è impossibile (si può provare colle 5 dita che 2 . 2 = 4,

ciò che è necessario nel pensiero, è analitico: gli assiomi della Geometria sono invece proposizioni sintetiche (lo Schröder le chiama anche *relazioni*), e perciò appunto non possono elevar pretese alla necessità e all'*apriorità*. Cf. E. Schröder. *Vorlesungen über die Algebra der Logik*. I Bd. Leipzig 1890, pag. 441.

(1) Cf. *Log. St.*, pag. 140, 141. *Gesch. des Mat.*, pag. 121, vol. II.

ma non che 1000 . 1000 = 1000000), il Lange risponde che le operazioni coi grandi numeri non derivano direttamente nè dal concetto, nè dall' intuizione, ma si compiono secondo quel sistema di divisione in operazioni parziali, che è già a base del sistema numerale, e che ha trovato poi nel sistema dei segni o delle cifre arabiche la sua piena corrispondenza scritta. Così nell'uso quotidiano, come nella serie successiva delle operazioni parziali, noi ci teniamo all'intuizione di questi segni; perchè infatti l'intuizione dei segni è un'intuizione che può sostituire l'intuizione delle cose, come mostrò già il Mill (1).

Io per parte mia non sono fra quelli che negano la possibilità di una logica matematica. La logica matematica ha provato la sua possibilità col fatto stesso di esistere. Boole, Ievons, Schröder sono là a provarlo. Per quanto sia ancora discutibile dalle varie scuole filosofiche il principio onde muovono i loro calcoli, resta sempre vero che per via di questi si può arrivare alla soluzione di problemi logici e alla dimostrazione di verità logiche. Posta, ad esempio, col Boole

(1) Cf. *Gesch. des Mat.*, ib. pag. 120.

Il Masci stesso osserva: Da principio furono le ricerche di geometria pratica o induttiva che fecero trovare dei teoremi aritmetici. Così il teorema aritmetico che la somma dei numeri impari da 1 ad n è eguale al quadrato della metà del numero pari immediatamente superiore, fu trovato costruendo successivamente i quadrati immediatamente superiori rispetto a un quadrato. E l'altro teorema che la somma d'un qualunque numero di termini della serie naturale da 1 ad n è uguale ad $n \left(\frac{n+1}{2}\right)$ fu probabilmente, come indica il nome di numero triangolare (Dreieckzahl), attinto dai tentativi di misurare l'area del triangolo formato dalla diagonale del quadrato, mediante la risoluzione di questo in quadrati minori. Questo procedere dalla ricerca geometrica all'aritmetica è la riprova storica del procedere della conoscenza anche nella Matematica dal concreto all'astratto, che è naturale alla mente umana.

l'equazione logica fondamentale $X^2 = X$ (esprimente che la ripetizione di un concetto non aumenta il concetto stesso, a differenza delle grandezze che si generano mediante la progressione nel tempo e nello spazio, e perciò acquistano una infinita accrescibilità e divisibilità, essendo tutti i punti nel tempo e nello spazio diversi l'uno dall'altro, cioè l'uno dopo o fuori dell'altro) posta, dico, l'equazione logica $X = X^2$, donde $X - X^2 = 0$, $X(1 - X) = 0$, chi può rifiutarsi a vedere in quest'ultima formula elegantemente espresso il principio di contradizione? Essa significa infatti che una cosa che sia X e nello stesso tempo il suo contrario, cioè $1 - X$ (1 indica il campo del pensabile) è 0 cioè un nulla, una cosa impensabile. E chi può negare che dalle figure geometriche proposte dal Lange non risulti l'evidenza dei rapporti logici fondamentali?

Essendo la logica e la matematica le sole scienze apodittiche, le sole scienze formali cioè dell'*a priori*, non fa maraviglia che esse possano avere una notazione in comune, che le operazioni sì dell'una come dell'altra si possano esprimere con gli stessi simboli. La logica delle qualità, dice il Masci, non si può ridurre alla logica delle quantità; la qualità è il limite che il ragionamento matematico non può superare. Ciò non è vero che in parte: anche fra i concetti esistono rapporti quantitativi, e sui concetti si possono eseguire operazioni che rassomigliano a quelle che si eseguiscono sulle grandezze o sulle quantità. I concetti hanno anch'essi una estensione, in quanto rappresentano una classe, un gruppo di oggetti, e la moderna teoria della quantificazione del predicato che muove dall'Hamilton rende possibile la riduzione dei giudizi alla forma delle equazioni matematiche. Anche contro questa teoria si è molto scritto, cominciando dallo Stuart Mill. Riconoscendo che il soggetto nel giudizio è preso nella sua estensione, si è insistito sul fatto che il predicato è invece preso nella sua comprensione. Il soggetto sarebbe

dunque, nel giudizio, denotativo, cioè indicante una classe, il predicato invece connotativo, indicante cioè un gruppo di qualità.

Ma non si è osservato che il giudizio in generale si può interpretare tanto estensivamente quanto comprensivamente, e che delle due interpretazioni la comprensiva è quella più originaria. Quando io dico « il cielo è turchino » io non voglio altro significare che la coesistenza delle proprietà espresse dalla parola *cielo*, colle proprietà espresse dalla parola *turchino*. Quando l'uomo primitivo, ad es., ha visto per la prima volta un elefante e ha pensato: l'elefante è un animale, che altro mai ha egli voluto rappresentarsi se non la corrispondenza tra le qualità di quell'essere da lui veduto e le qualità proprie dell'animale? Anche il soggetto fu dunque originariamente pensato secondo la comprensione, ossia apparve allo spirito, al pari del predicato, non già come una classe, ma come un gruppo d'attributi. Se il soggetto è poi quantificato col progresso del linguaggio, non c'è nessuna ragione per ritenere inquantificabile in teoria il predicato; e se esso nella pratica del linguaggio non apparisce quantificato, ciò non può dipendere che dalla insufficienza logica del linguaggio stesso. Il contenuto del linguaggio, dice il Lange, non è solamente logico, ma è intimamente connesso con tutta quanta la vita spirituale dell'uomo, cioè colle disposizioni, coi sentimenti, coi pensieri, colle tendenze, che formano un tutto strettamente collegato, e non risolvibile che incompiutamente e difficilmente dall'analisi.

L'Hamilton disse che oggetto della logica è di enunciare esplicitamente nel linguaggio ciò che è contenuto implicitamente nel pensiero. Ora l'estensione è contenuta implicitamente nel pensiero del predicato. Quando io formulo un giudizio d'identità dicendo: I triangoli sono figure chiusé da tre rette, so bene che l'estensione del predicato è eguale a

quella del soggetto, $A = B$; quando formulo invece il giudizio categorico: Gli uomini sono animali, so bene che il gruppo *uomini* non coincide col gruppo *animali*, ma costituisce solo una parte di questo, $A = v B$ (Boole) $A = AB$ (Ievons) $A < B$ (Schröder).

Ma, data la possibilità di una forma matematica della logica, resta a sapere se per questa via la logica romperà definitivamente col suo passato, mettendosi, come le discipline matematiche, in una via di sempre nuovi aumenti e di continui progressi. Io qui non sono dell'opinione del Lange, del Boole, del Ievons, dello Schröder e degli altri. L'applicazione della matematica, se allargherà in un punto o in un altro i confini della logica formale, non varrà a fare di questa una scienza al tutto nuova, come pretendono alcuni dei contemporanei. La logica è evidentemente una scienza più generale della matematica; l'algebra dei concetti, diceva il Riehl, è più universale che l'algebra dei numeri; la matematica suppone idealmente la logica. Il ragionamento matematico è sempre un ragionamento, che suppone le leggi formali del pensiero. Benchè le matematiche si fondino sull'intuizione, il principio d'identità e contradizione di cui si fa in esse continuo uso non scaturisce dall'intuizione. Il Lange erra a credere il contrario. Il Kant mostrò che, come principio logico, il principio d'identità e contradizione non si fonda sull'intuizione, a meno che non vi si aggiunga l'intuizione del tempo, dicendo: È impossibile che una cosa sia e non sia *nello stesso tempo*. Un uomo infatti non può essere e non essere giovane nello stesso tempo, ma lo può successivamente. Il principio così diventa sintetico (1), ma non è più un puro principio

(1) Il carattere sintetico apparisce anche più evidente quando si dice: È impossibile che una cosa sia e non sia nello stesso tempo e *sotto lo stesso rispetto*.

formale del pensiero, secondo il quale non si può affermare e negare di un soggetto lo stesso predicato.

Se fosse vero il concetto del Boole e del Lange, la logica rientrerebbe perfettamente nell'Algebra o nella Geometria, perdendo così il suo carattere di scienza fondamentale del pensiero. Onde il Ievons stesso rivendicò la priorità ideale e l'universalità della logica rispetto alla matematica, mostrando che non già il sistema delle equazioni logiche è un caso speciale del sistema algebrico, come voleva il Boole, ma questo piuttosto è un caso speciale di quello. Il numero non può essere superiore e anteriore a ogni nozione e condizione logica. La logica non è subordinata alla scienza del numero; i simboli logici non possono soggiacere a condizioni puramente algebriche.

Come si può matematizzare la logica, così si può logicizzare la matematica. Ossia, come si può avvicinare la logica alla scienze pure d'intuizione adoperando segni algebrici o figure geometriche a rappresentar concetti, così si può avvicinar la matematica alla scienza pura del pensiero limitando con Grassmann ed Hankel il fattore intuitivo, e operando non su figure o numeri ma su concetti *(intellectuelle Obiekte, Gedankendinge)*. Ciò perchè fino da Descartes si rilevò l'identità fra le più semplici leggi dei concetti e quelle delle grandezze. Ma come la matematica si fonda in ultimo sull'intuizione, così la logica si fonda in ultimo sul pensiero puro. Ora questo pensiero puro sarà un'astrazione come il tempo e lo spazio puro dei matematici, ma è sempre il presupposto necessario della logica, come l'intuizione pura del tempo e dello spazio (che per il Lange non è una intuizione, essendo per lui ogni intuizione reale una intuizione empirica) è il presupposto della matematica. Si può accordare al Lange che non ci sia pensiero senza una qualche intuizione, come pure che noi non possiamo rappresentarci un tempo e uno spazio assolutamente

vuoto; ma non bisogna confondere una quistione psicologica con una quistione logica. Alla logica non importa la genesi del pensiero. La logica dice al pensiero: Dimmi chi sei e non donde vieni. Facendo la logica non del fanciullo o del selvaggio, ma dell'uomo in generale, io ho il diritto di supporre in lui il pensiero, e di ricercare le leggi formali di questo pensiero. Il pensiero svolgendosi si libera sempre più dall'intuizione, ciò che il Lange sembra dimenticare; dall'intuizione delle cose all'intuizione dei segni c'è già un bel salto. I rapporti più semplici e le operazioni fondamentali sui concetti e sulle grandezze saranno identici, e si esprimeranno quelli in figure geometriche, queste in formule algebriche; ma la prima parola della matematica è grandezza, la prima parola della logica è concetto. E la formazione o generazione logica delle grandezze non è la stessa che la formazione o generazione logica dei concetti.

Il Lange ha anche torto nel voler derivare l'idea di numero dall'idea di spazio, e quindi nel basare l'Aritmetica come la Geometria sull'intuizione dello spazio. L'essenza del numero sta nella ripetizione, nell'aggiunzione successiva di unità a unità. Che queste unità siano primitivamente d'origine spaziale, come dimostra il Lange, non prova altro che il pensiero procede sempre dal concreto all'astratto, che prima di adoperare i numeri–parole, l'uomo adoperò i numeri–cose, come le dita della mano, le dita dei piedi ecc., non già che l'essenza del numero stia nell'intuizione spaziale di questi oggetti, perchè senza ripetizione, cioè senza aggiunzione sistematica di uno a uno che può farsi solamente nel tempo, non vi ha numero. Al Masci poi che risolve il numerare nel pensare si può obiettare che la grandezza numerata o numerabile non è data dal pensiero ma dall'intuizione; e che anche gli atti del pensiero non si potrebbero numerare che successivamente, cioè mediante il tempo.

Nè il Lange riesce a mostrare che la rappresentazione del tempo deriva da quella dello spazio. Già egli non la deriva dalla rappresentazione pura e semplice dello spazio, ma chiama in aiuto la rappresentazione del movimento: il tempo è infatti per lui una rappresentazione dedotta dalla imagine spaziale del movimento sopra una linea. Secondo me, se fra le due rappresentazioni di tempo e di spazio a una dovesse spettare la priorità logica, essa spetterebbe piuttosto alla rappresentazione del tempo che a quella dello spazio. Sono noti i tentativi fatti da illustri psicologi di dedurre la rappresentazione dello spazio da quella del tempo (cf. i miei *Principj di Psicologia)*; e abbiamo più sopra udito dire dal Kant che il tempo è la condizione formale *a priori* di tutti i fenomeni in generale, mentre lo spazio è invece condizione *a priori* solamente per i fenomeni esterni (1).

Che non esista un vero e proprio senso interno, che abbia per forma esclusivamente il tempo e si riferisca esclusivamente alle nostre condizioni spirituali, è un' altra quistione già da me altrove discussa (cf. il mio *F. A. Lange e il Materialismo)*. Questo senso interno io non l'ammetto insieme col Lange, ma non per la ragione da lui addotta che la rappresentazione del tempo si riporti a quella dello spazio, sibbene perchè, in conformità col Kant, essendo il tempo condizione generale di tutti i fatti psichici ed essendo anche quelle che noi chiamiamo sensazioni esterne un fatto psichico, cioè un fatto interno, il tempo diventa la condizione generale di tutte le sensazioni, anche di quelle che noi chiamiamo esterne cioè aventi un oggetto esteriore.

Il principio di contradizione è il principio universale di

(1) Dice lo Schröder (op. cit. pag. 18): Die Existenz des eignen Ich's in der Form der Zeit ist wol (für dieses selbst) die unzweifelhafteste, die unbestreitbarste und auch unbestrittenste von allen Thatsachen.

ogni conoscenza analitica: ma il principio di contradizione non è per il Kant il solo principio logico, c'è anche il principio della ragion sufficiente. Ora il principio di ragion sufficiente (quello di cui lo Schopenhauer ricercò la radice quadruplice) è un principio sintetico. Tutto ciò che accade ha la sua ragione, è per il Kant un giudizio sintetico. Non è quindi esatto che per il Kant le proposizioni logiche siano tutte di natura analitica. Egli pone il principio di ragion sufficiente come il principio dei giudizi assertorî, subordinato sì al principio di contradizione, ma non da questo derivato.

Parlando dell'avvenire della Logica, il Kant dice che se dopo Aristotile ella ha poco ancora da guadagnare quanto al contenuto, può tuttavia guadagnar molto in esattezza, in precisione, in chiarezza. Ma guadagnar in esattezza, in precisione, in chiarezza, non sarebbe poco per la logica; e mezzo a tale scopo non è la sua traduzione in formule matematiche? Per ciò che concerne la precisione e l'esattezza sì: quanto alla chiarezza è discutibile. Fu osservato che l'algebra della logica non è una logica, ma un calcolo logico, un mezzo meccanico non del pensiero logico, ma per risparmiare il pensiero logico. Come una macchina è uno strumento per risparmiare spesa di forza, così un calcolo simbolico è uno strumento per risparmiare spesa d'intelligenza. Quanto più perfetto è il calcolo, quanto più compiute le formule, tanto minore è l'intelligenza che occorre per arrivare al risultato. Allora i resultati, e soprattutto i procedimenti per cui questi risultati si ottengono, non apparirebbero chiari al pensiero, perchè il pensiero non ritroverebbe in quelli sè stesso. Il calcolo logico avrebbe così per effetto di sostituire il calcolo alla logica. La logica diventerebbe allora una *mathematica nescientis se numerare animi.*